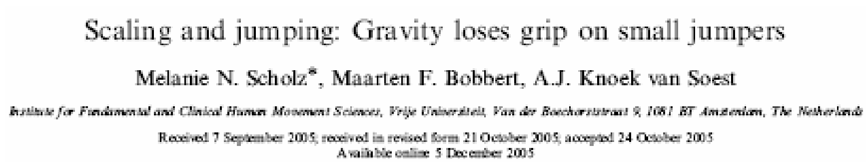
GRÖSSENVERÄNDERUNG – SKALIERUNG (Allometrie)

Skalierung ist die Untersuchung des Verhaltens physikalischer Größen beim Übergang zu kleineren, oder größeren Systemen.

Hauptfrage:
Würde ein Lebewesen oder eine Pflanze unter Beibehaltung aller Proportionen vergrößert, bzw. verkleinert werden (isometrische Grössenveränderung), welche Konsequenzen hätte diese Übung ?

Pedley (Ed.): Scale Effects in Animal Locomotion. Academic Press, London, 1977.

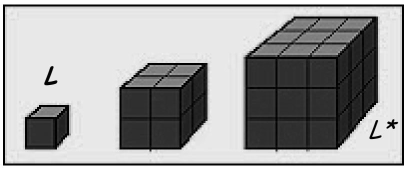

Scaling and jumping: Gravity loses grip on small jumpers

Melanie N. Scholz*, Maarten F. Bobbert, A.J. Knoek van Soest

Institute for Fundamental and Clinical Human Movement Sciences, Vrije Universiteit, Van der Boechorststraat 9, 1081 BT Amsterdam, The Netherlands

Received 7 September 2005; received in revised form 21 October 2005; accepted 24 October 2005
Available online 5 December 2005

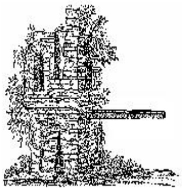
Die Konzepte liegen in der Geometrie



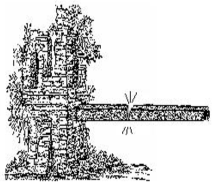
Würfel mit Seitenlänge $L=1$ hat Volumen $V=L^3=1$ und Oberfl. $O=6L^2=6$

Würfel mit $L^*=3L$ hat $V^*=27L^3 = 27V$ und $O^*=9 \cdot 6L^2 = 9 \cdot O$

Würfel mit $L^*=5L$ hat $V^*=125L^3 = 125V$ und $O^*=25 \cdot 6L^2 = 25 \cdot O$



Verlängerung des Balken würde zum Bruch durch Eigengewicht führen



Der Balken mit verdoppelten Dimensionen würde unter Eigengewicht brechen

Originalzeichnungen von G. Galilei

Biologische Konsequenzen

Vergrößerung der linearen Dimensionen um Faktor 5 gäbe uns einen super Feldhasen mit der 25-fachen Oberfläche und einer 125-fachen Masse (etwa 800 kg !). Knochen hätten 25-fache Querschnitte.

Wärme wird durch die Oberfläche abgegeben. Dies steigt auf das 25-fache. Produzierte Wärmemenge (Nahrungsmenge) ist proportional zum Volumen $\rightarrow$ der Hase wird ganz heiß

Er hat dazu noch 125-fache Gehirnmasse … ?
Springt er nun jetzt 5-mal so hoch … ?

Bei Skalierungsproblemen ist es wichtig zu erkennen ob bestimmte Parameter proportional zu Länge, Fläche, oder Volumen sind.

Viele Systeme sind eher durch Massen bestimmt, deren Wechselwirkung mit Umwelt durch die Oberflächen

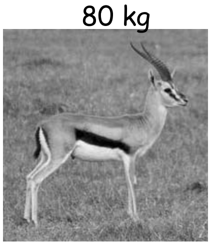
---

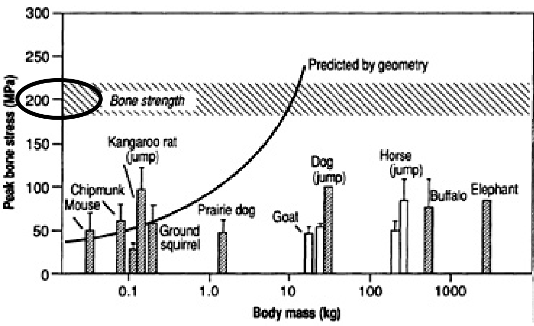
Bereits Galileo erkannte, dass bei Vergrößerung der Zuwachs des Durchmessers größer sein muss als der Zuwachs der Länge.
Sein Vorschlag: $d \sim L^2$, dh. doppelte Länge $\rightarrow$ Querschnitt vierfach.
Es ist etwas zu viel. Messungen ergaben, dass mech. Eigenschaften der Knochen bei Säugetieren etwa gleich sind: ca. 200 MN/m2.

Modell:
Körper – ein Würfel mit Lange L.
Knochen – ein Zylinder mit Durchmesser d.
Kritische Druckspannung (Bruch) σ:

$$\sigma = \frac{F_G}{d^2} \propto \frac{L^3}{d^2} \Rightarrow d \propto L^{\frac{3}{2}}$$

80 kg





4000 kg

Vergleich der Skelettmasse M_{SK} zu Gesamtmasse M:

$$M_{SK} \propto L \cdot d^2 \approx L \cdot (L^{\frac{3}{2}})^2 = L^4 \quad und \quad M \propto L^3$$

$$\Rightarrow \quad M_{SK} \propto M^{\frac{4}{3}}$$

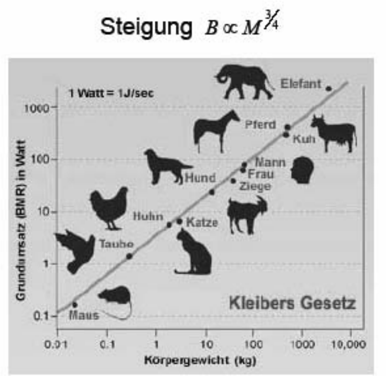
Empirisch wurde festgestellt, dass: $\boxed{M_{SK} = 0{,}061 \cdot M^{1.09}}$

<u>Beispiel Metabolismus:</u>

Verhältnis Oberfl. zu Vol. = 2/3

Beobachtung: Verhältnis 3/4

Also muss es noch andere Gründe für den Ruhe-Metabolismus geben, als nur Wärmeverlust

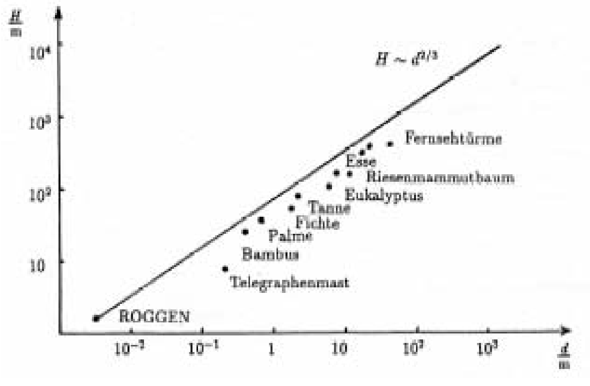


Plants and animals are not so different:
Growth rate vs. Body Mass
Damuth, PNAS 2001.

Pflanzenhöhe

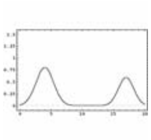
„Elastizitätseigenschaften sind für die Belastbarkeit wichtiger als Festigkeit" . Maximale Höhe (McMahon (1973), Science):

$$H \propto (\frac{E}{\rho})^{\frac{1}{3}} \cdot d^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad d \propto H^{\frac{3}{2}}$$

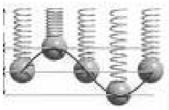


<u>Pflanzenhöhe</u> - es gibt auch die hydraulische Begrenzung - der Druck des Wassers steigt mit der Höhe des Baumes und deshalb kann der Baum nicht beliebig hoch wachsen

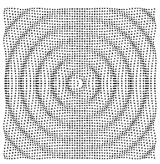
Bei Skalierungsfragen ist es wichtig zu erkennen ob bestimmte Parameter welche Funktionen von Organismen bestimmen proportional zu Länge, Fläche, oder Volumen sind.

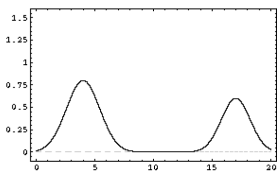


Schwingungen und Wellen



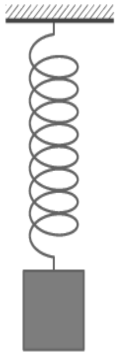
- **Schwingungen sind *zeitlich* periodische Prozesse (z.B. Pendel, Molekülschwingung)**
- **Wellen sind *zeitlich <u>und</u> räumlich* periodische Prozesse (z.B. Wasserwellen, Erdbebenwellen)**
- **Harmonische Schwingungen (ungedämpft) sind zeitlich periodische Prozesse, deren Größe (Auslenkung) z.B. einer Sinusfunktion folgt.**
- **Schwingung in physikalischen Systemen ist immer gedämpft (Reibung). Die Amplitude (Auslenkung) wird stets verringert**





Eine **Schwingung** bezeichnet den Verlauf einer Zustandsänderung, wenn ein System auf Grund einer Störung aus dem Gleichgewicht gebracht und durch eine rück-treibende Kraft wieder in Richtung des Ausgangszustandes gezwungen wird. Schwingen eines Systems basiert auf der Energieumwandlung zwischen zwei Energieformen.

Harmonische Schwingung – Proportionalität zwischen der Auslenkung aus der Ruhelage und rücktreibender Kraft $F = -k \cdot y$
Es gilt das Hookesche Gesetz.



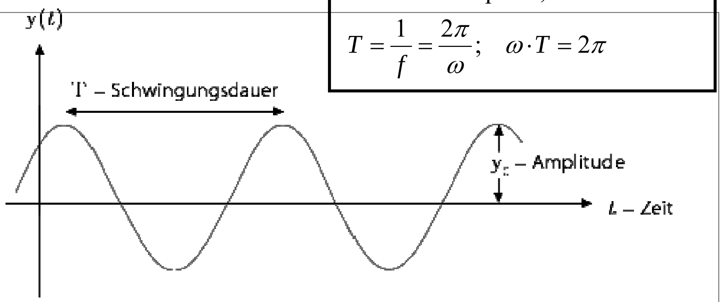
Parameter, die eine Schwingung beschreiben:

λ ... Wellenlänge (m, cm, μm, nm)

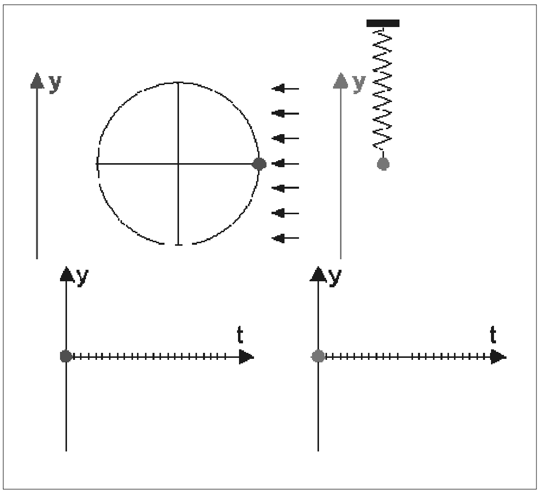
f ... Frequenz (sec^{-1}, Herz)

ω ... Kreisfrequenz; T ... Periode

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \omega \cdot T = 2\pi$$

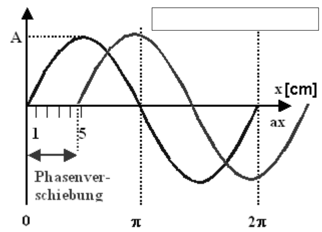


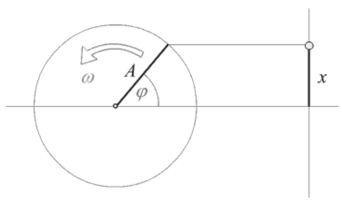
Harmonische Schwingung und Kreisbewegung



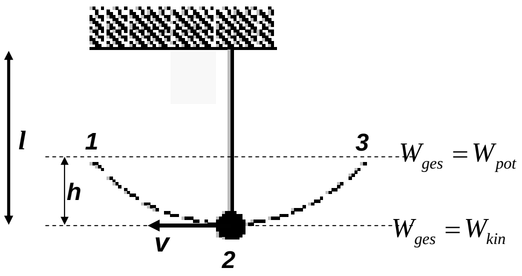
$$y = y_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

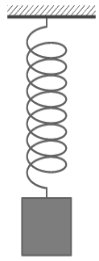
φ ... Phase (Phasenwinkel)





Harmonische Schwingung eines Pendels





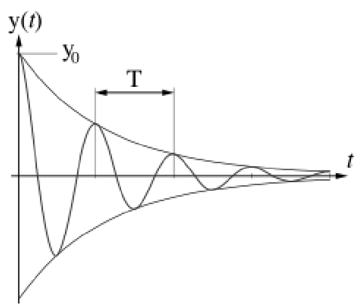
Fadenpendel

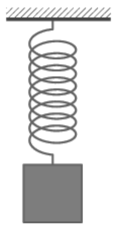
$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Federpendel

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Systeme die in der Wirklichkeit vorkommen erleiden einen Verlust an Schwingungsenergie (Reibung). Der Energieverlust führt zur <u>gedämpften Schwingung</u>. Die Amplitude nimmt mit der Zeit ab.





Die Frequenz einer gedämpften Schwingung ist stets kleiner als die der ungedämpften Schwingung. Sie beträgt:

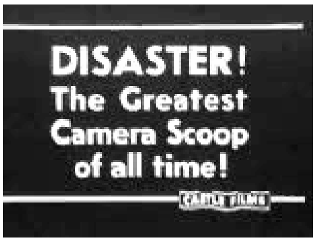
$$\omega = 2\pi \cdot f = \sqrt{\omega_0^{\ 2} - \delta^2}$$

Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung

Wegen T=1/f ist hier die Periode länger. Reibung bremst die Bewegung.
Als Dämpfungsmaß kann auch das Verhältnis von zwei aufeinander folgender Amplituden genommen werden. Es wird Dämpfungsekrement genannt.

Erzwungene Schwingung

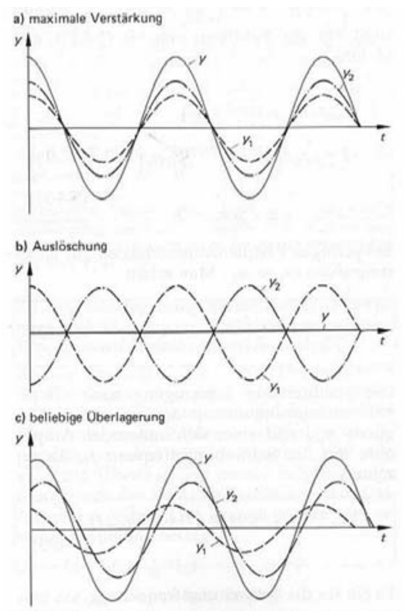
Soll eine Schwingung dauern erhalten werden muss einem System Energie zugeführt werden. Energiezufuhr muss periodisch sein und die Dämpfungsverluste kompensieren – es ist eine erzwungene Schwingung.



Je näher die Frequenz des Anstoßes bei der Eigenfrequenz ist desto besser spricht ein System auf diese Anregung an.

Eine folge von Anstößen mit der Eigenfrequenz führt zur großer Amplitude – **Resonanz**. Bei geringer Dämpfung kann dies zu einer **Resonanzkatastrophe** führen.

Überlagerung von Schwingungen (Interferenz)

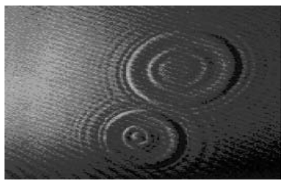


Konstruktive Interferenz

$$\varphi = 2n \cdot \pi$$

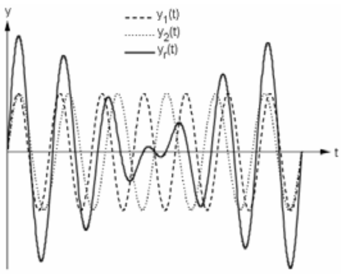
Destruktive Interferenz

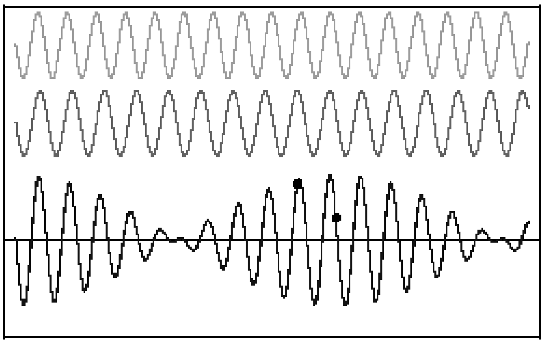
$$\varphi = 2(n+1) \cdot \pi$$



Überlagerung von Schwingungen mit ähnlichen Frequenzen führt zur Schwebungen

Schwingungen mit Amplitude und mit $\omega 1 \cong \omega 2$, $|\omega 1 - \omega 2| = \Delta\omega << \omega$



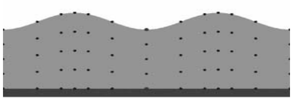


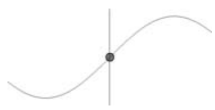
$$x(t) = x_0\{\sin(\omega t + \Delta\omega t) + \sin(\omega t)\}$$
$$\cong \left\{2x_0 \cos\frac{\Delta\omega}{2}\right\}\sin(\omega t)$$

Wellen- Ausbreitung von Schwingungen

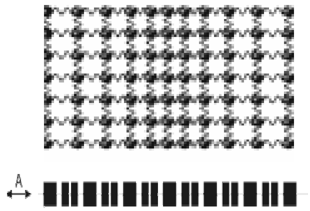
Wellen sind zeitlich ***und*** räumlich periodische Prozesse

Wellen können $\left.\begin{array}{l}\text{Transversal}\\ \text{Longitudinal}\end{array}\right\}$ sein



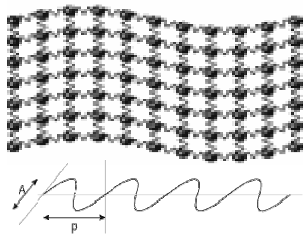


Longitudinale Welle



Longitudinalwellen: Die Schwingung (Störung) des Mediums erfolgt parallel zur Ausbreitungsrichtung.
Schall als Druckwelle, in Luft in Festkörpern (Lärm dringt auch durch Fensterscheiben) oder in Flüssigkeiten (Walgesang).

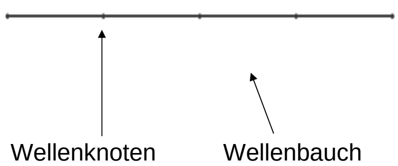
Transversale Welle



Transversalwellen: Die Schwingung (Störung) des Mediums erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Wasserwellen als Oberflächenwellen. Sie breiten sich waagrecht aus, die Schwingung selbst erfolgt jedoch in der Senkrechten.

Stehende Welle

Beispiel - eine Seilwelle. Ein Seilende wird auf und ab bewegt und so eine fortschreitende Welle im Seil erzeugt. Wird das andere Seilende befestigt, so wird die Welle an dieser Stelle reflektiert und läuft auf dem Seil zurück.



Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle: $\mathrm{c} = \frac{Wellenl\ddot{a}nge}{Periode} = \frac{\lambda}{T}$

Zusammenhang: Periode-Frequenz: $f = \frac{1}{T}\left[\frac{1}{s}\right] \equiv [Hz]$

Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle: $\mathrm{c} = \lambda \cdot f$

SCHALL – eine mechanische Welle, die durch einen Schwingenden Körper erzeugt wird. Die Moleküle des Mediums (elastisch) werden zum „Mitschwingen“ veranlasst und übertragen die Störung.

Schall breitet sich in einem homogenen schallleitenden Medium nach allen Richtungen symmetrisch von der Schallquelle weg aus.

Entsprechend dem Frequenzbereich unterscheidet man:

Infraschall < 16 Hz ; für Menschen nicht hörbar
Hörschall 16 Hz - 20 kHz ; ist für Menschen hörbar
Ultraschall 20 kHz - 1 GHz; für Menschen nicht hörbar

Mit **Schallausbreitung** bezeichnet man die Wellenerscheinung, die zur Fortpflanzung einer Druckstörung führt. Zur Ausbreitung des Schalles ist ein elastisches Medium benötigt, also ist im Vakuum keine Schallübertragung möglich.
Die Geschwindigkeit der Ausbreitung wird **Schallgeschwindigkeit** genannt:

$$v_{Schall} = \sqrt{\frac{M}{\rho}}; \quad \text{M..Kompressionsmodul, } \rho\text{..Dichte}$$

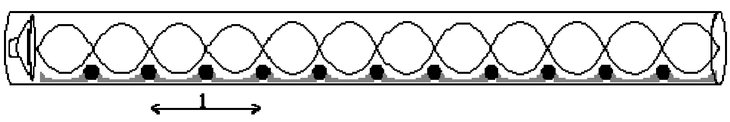
Schallgeschwindigkeiten
(bei 0°C) in einigen Medien:

Medium	**v_{Schall}(m/s)**
Luft	330
Wasser	1484
Glas	5000
Granit	6000

Schalldruck – Druckschwankungen - üblicherweise Luft, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten.
Diese Druckschwankungen werden vom Trommelfell als Sensor in Bewegungen zur Hörempfindung umgesetzt.
Wenn es sich um hörbaren Schall handelt, können diese Bewegungen dann durch das Innenohr (Gehör-Hirn-System) wahrgenommen werden.

Demonstration der stehenden Wellen und Messung der Schallfrequenz (Kundt, 1866)

- Man beobachtet schwingendes Korkpulver in einem Glasrohr
- An den Bewegungsbäuchen wird das Pulver durch die rasche Bewegung der Luft weggeschleudert und sammelt sich an den Bewegungsknoten
- Der Abstand zwischen zwei Bewegungsknoten ergibt somit die halbe Schallwellenlänge.



Die Schallgeschwindigkeit in Luft (20 ° C) ist 343 m/s.

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{343\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0.02\text{m}} = 17150\text{Hz}$$

Schalldruck – Druckschwankungen - üblicherweise Luft, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten.
Diese Druckschwankungen werden vom Trommelfell als Sensor in Bewegungen zur Hörempfindung umgesetzt (Frequenz = Tonhöhe)
Wenn es sich um hörbaren Schall handelt, können diese Bewegungen dann durch das Innenohr (Gehör-Hirn-System) wahrgenommen werden.

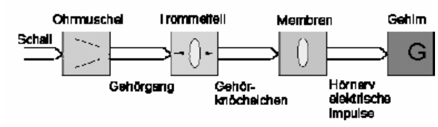
Menschliches Ohr ist empfindlicher Schalldruck-empfänger – untere Schwelle liegt bei etwa: $2 \cdot 10^{-5}\, Pa$

Schallintensität I_S: $I_S = \frac{Energie}{Zeit \cdot Fläche} = \frac{Leistung}{Fläche}\left[\frac{W}{m^2}\right]$

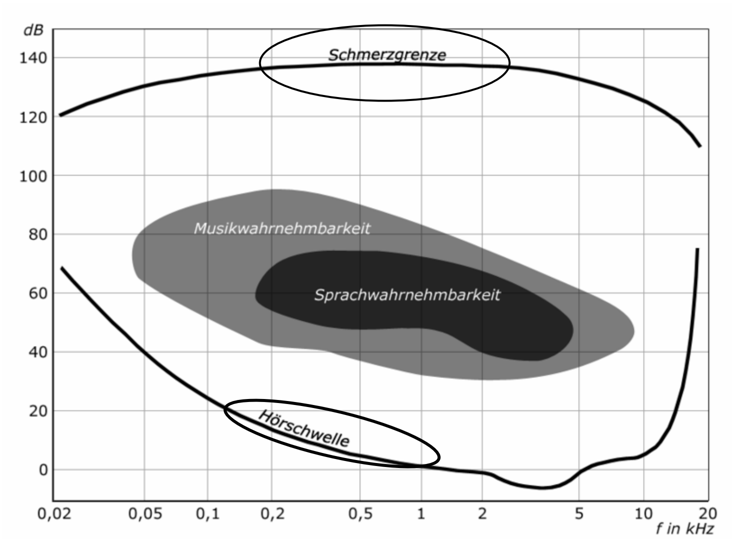
Schallpegel P_S: $P_S = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)[dB];\ I_0 = 10^{-12}\,\frac{W}{m^2}$

***I_0** ist Schallintensität an der Hörschwelle*

Hörprozess –
Umwandlung mechanischer Energie (Druckänderungen in der Luft) durch Hörvorhang in Signale die im auditiven Hirnbereich verarbeitet werden



Die **Hörfläche** ist ein Frequenz- und Pegelbereich von Schall, der vom normalen menschlichen Gehör wahrgenommen werden kann.

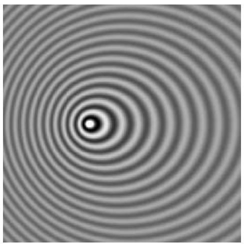


Schallpegel

Frequenz

<u>Doppler Effekt</u>

Bewegt sich der Erreger im Medium, so tritt der <u>Dopplereffekt</u> auf.
Dieser tritt auch auf, wenn sich der Beobachter (Zuhörer) im Medium bewegt.
Dieser Effekt gilt für alle Arten von Wellen !!

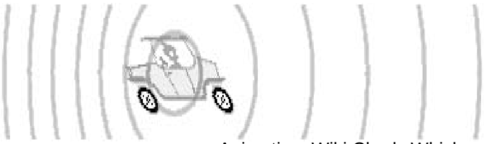


Es gibt einen Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeit, Wellenlänge und Frequenz: ***c=f.λ***

Bewegte Quelle, Beobachter ruht

Wegen der Bewegung der Quelle mit Geschw. v zum Beobachter gibt es eine „Verdichtung" – es ändert sich der Abstand zweier Wellenberge (also die Wellenlänge !)

$$f_v = \frac{c}{\lambda_v} = \frac{c \cdot f}{c - v} = \frac{f}{1 - \frac{v}{c}}$$



Animation_Wiki:Charly Whisky

Bewegte Quelle, Beobachter ruht

Wegen der **Bewegung der Quelle mit Geschw. v *vom*** Beobachter gibt es eine „Verdünnung" – es ändert sich der Abstand zweier Wellenberge (Wellenlänge !)

Beobachter hört folgende Frequenz:

$$f_v = \frac{c}{\lambda_v} = \frac{c \cdot f}{c - v} = \frac{f}{1 + \frac{v}{c}}$$

Bewegter Beobachter, ruhende Quelle

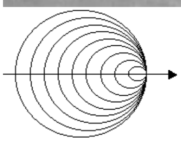
Hier ändert sich aus der Sicht des Beobachters die Schallgeschwindigkeit, er bewegt sich auf die Quelle zu – die sich ausbreitenden Wellenberge erreichen den Beobachter früher. Er hört folgende Frequenz:

$$f_B = \frac{c_B}{\lambda} = \frac{c + \mathrm{v}}{\lambda} = f\,(1 + \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}})$$

Entfernt sich der Beobachter von der Quelle, so hört er folgende Frequenz:

$$f_B = \frac{c_B}{\lambda} = \frac{c - \mathrm{v}}{\lambda} = f\,(1 - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{c}})$$

Sonderfall Schallgeschwindigkeit (v = c)



Die Quelle bewegt sich in dem Fall immer mit der ersten Wellenfront mit, von wo aus sie wiederum weitere Wellen aussendet, die sich mit der ersten vereinen, somit addieren sich die durch die Wellen erzeugten Druckstörungen.

Es käme über kurz oder lang zur Zerstörung des Quelle durch eine Resonanzkatastrophe.

Deshalb fliegen Flugzeuge auch immer langsamer als die Schallgeschwindigkeit oder mit Überschall. Flögen sie genau mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalls, würden sie die sogenannte „Schallmauer“ nicht „durchbrechen“, sondern - bildlich gesprochen - daran „zerschellen“.