Fortpflanzung von Unsicherheiten (Gauß'sche Fehlerrechnung)

Bei der Auswertung eines Experimentes und der Angabe eines Endergebnisses genügt es üblicherweise nicht, die bei einer Messung ermittelten Zahlenwerte für Teilergebnisse in einen gegebenen mathematischen Zusammenhang zu setzen und daraus ein Endergebnis zu berechnen.
Tatsächlich tritt bei jeder Messung notwendigerweise eine Unsicherheit auf (die dann als „Fehler" bzw. *engl. „error"* bezeichnet wird). Setzt man „fehlerbehaftete", d.h. *unsichere* Einzelergebnisse in einen Zusammenhang (z.B. durch Einsetzen in eine Formel), muss auch das Endergebnis eine Unsicherheit *(„Fehler")* aufweisen.
Diese Unsicherheit eines zusammengesetzten Ergebnisses ist zu ermitteln.

Vorgangsweise:

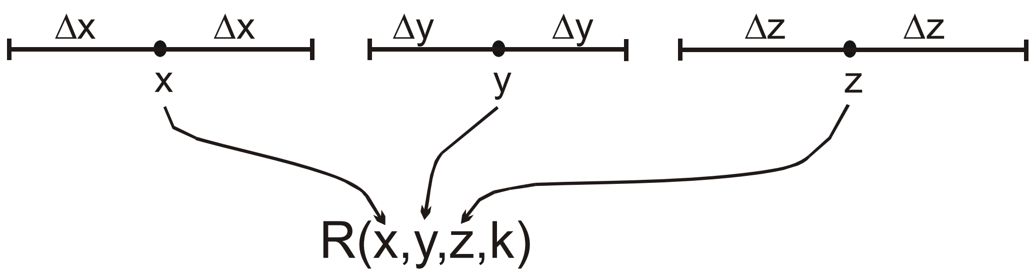
Das Gesamtergebnis R hängt von 4 Größen k, x, y, z ab, dies kann man auch folgendermaßen ausdrücken:

$R = R(x, y, z, k)$ *, in Worten: R ist eine Funktion (oder hängt ab) von x, y, z und k.*

Um R zu ermitteln, ist es notwendig, die Messgrößen x, y und z zu messen; k sei eine Konstante.
Bei der Messung der Größe x sei die Unsicherheit (der Fehler) Δx , bei y Δy und bei z Δz .
Die Konstante k hat keinen Fehler (bzw. dieser ist vernachlässigbar klein).

Die **Ermittlung dieser Unsicherheiten** **(** Δx **,** Δy **,** Δz **)** erfolgt durch:
- ***Berechnung der Standardabweichung*** (bei einer Messserie) oder
- durch ***Verwendung der Unsicherheit des Messinstrumentes*** (siehe Bedienungsanleitung)
- oder ***durch Schätzung*** (die am wenigsten genaue und daher letztgewählte Möglichkeit).

Jede der Variablen, die in R eingeht, ist in einem gewissen Δ -Bereich unsicher und verändern somit das Endergebnis R:



Nun stellt sich die Frage:
Wie verändert sich R wenn die Variablen im Rahmen ihrer Unsicherheiten Δx *,* Δy *und* Δz *schwanken?*

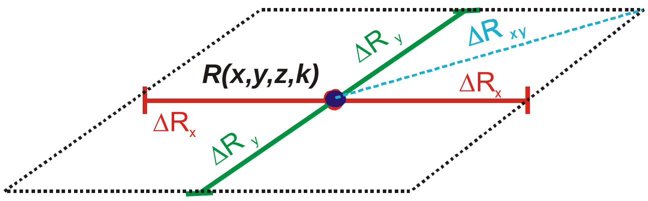
Um das beurteilen zu können, geht man systematisch vor. Man betrachtet die Auswirkung auf R für jede Variable getrennt, genauer gesagt:

R(x,y,z,k) ändert sich um den Wert ΔR_x wenn sich x um ±Δx ändert während y und z festgehalten werden. Analog ergibt sich ΔR_x und ΔR_z.

Wie setzt sich aber nun die Unsicherheit des Gesamtergebnisses ΔR aus den Einzelunsicherheiten ΔR_x, ΔR_y, ΔR_z zusammen?

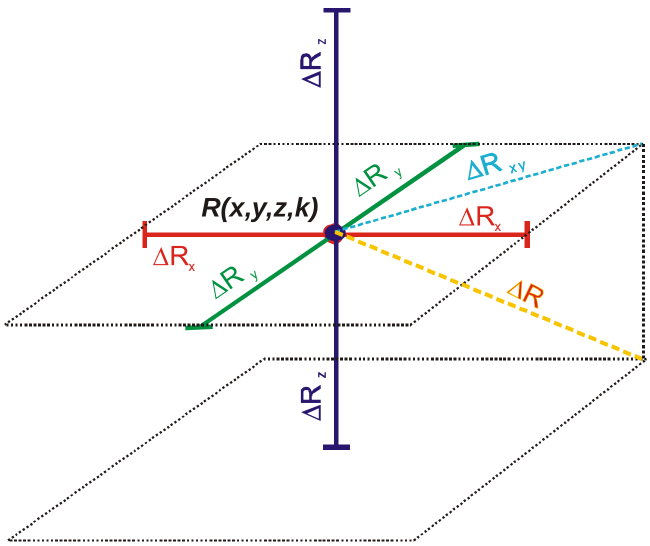
Zur Beantwortung dieser Frage wollen wir schrittweise die Einzelunsicherheiten miteinander in Verbindung bringen.

Im ***ersten Fall*** nehmen wir an, dass nur eine der drei Variablen, nämlich x, mit einer Unsicherheit Δx behaftet ist. Als Konsequenz ergibt sich eine Einzelunsicherheit ΔR_x für das Gesamtergebnis R. Anders gesagt R „schwankt" um ΔR_x.



Der ***zweite Fall*** ist etwas komplizierter, da gleichzeitig die Variablen x und y um Δx und Δy unsicher sind. Wieder wird ΔR_x, ΔR_y berechnet. In unserer Veranschaulichung werden diese beiden Einzelunsicherheiten normal aufeinander gezeichnet, da sie einander nicht beeinflussen, also unabhängig voneinander sind.
Zur Berechung der Auswirkungen auf R muss der schlechteste Fall angenommen werden, nämlich, dass ΔR_x und ΔR_y zur gleichen Zeit die größtmögliche Abweichung von R aufweisen. Dadurch ergibt sich:

$$\Delta R_{xy} = \sqrt{(\Delta R_x)^2 + (\Delta R_y)^2}$$



Der ***dritte Fall*** lässt sich auch noch durch eine Grafik veranschaulichen. Als dritte Achse wird nun ΔR_z hinzugefügt (normal auf die beiden anderen). Auf die gleiche Weise wie im zweiten Fall (größtmögliche Abweichung von R) errechnet sich nun die Gesamtunsicherheit ΔR zu:

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta R_x)^2 + (\Delta R_y)^2 + (\Delta R_z)^2}$$

Natürlich kann dieser Wurzelausdruck (man nennt ihn auch die ***quadratische Summe*** der Einzelunsicherheiten) um beliebig viele Unsicherheiten bezüglich anderer Variablen erweitern. Wir haben hier aus Gründen der Anschaulichkeit nur 3 unsichere Variablen (x,y,z) angenommen.

D.h. wir fassen zusammen:

Die Unsicherheit des Gesamtergenisses R errechnet sich durch die quadratische Summe der Einzelunsicherheiten.

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta R_x)^2 + (\Delta R_y)^2 + (\Delta R_z)^2}$$

Die Einzelunsicherheiten ΔR_x, ΔR_y, ΔR_z sind ein Maß dafür, wie stark sich die Unsicherheit einer einzelnen Variable auswirkt. D.h. man kann direkt aus der Größe von ΔR_x, ΔR_y, ΔR_z sehen welche den größten Beitrag zur Unsicherheit des Gesamtergebnisses hat, und folglich auch welchen dieser Beiträge man tunlichst (z.B. durch genaueres Messen) verkleinern sollte.

Berechnung der Einzelunsicherheiten

Die Einzelunsicherheiten kann man durch partielle Differentiation oder durch direktes Einsetzen der unsicheren Variablen in R bestimmen.

(a) partielle Differentiation (klassiche Methode)

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta R_x)^2 + (\Delta R_y)^2 + (\Delta R_z)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x}\cdot\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\cdot\Delta z\right)^2}$$

für $R = R(x, y, z, k)$

Hierbei bedeutet $\partial R/\partial x$ ($\partial R/\partial y, \partial R/\partial z$) die *partielle Ableitung* von R nach der Variablen x (y, z). *Partielle Ableitungen* unterscheiden sich von „normalen“ Ableitungen lediglich dadurch, dass die abzuleitende Größe mehrere Variablen hat nach denen abgeleitet werden kann, aber für jede Ableitung nur eine dieser Variablen herausgegriffen wird. D.h. Man ermittelt die partielle Ableitung von R nach x (y, z), indem man R nach x (y, z) differenziert und dabei annimmt, y und z (bzw. x und z sowie x und y) seien Konstante.
Falls Sie mit Differenzieren keine oder wenig Erfahrung haben, sehen Sie sich die Differentiationsregeln auf der letzten Seite bzw. den Rechengang im folgenden Beispiel an!

Diese ***Quadrate der Ableitungen bilden die Gewichtungsfaktoren*** vor den einzelnen Messunsicherheiten. Damit sie angewendet werden können müssen für alle noch vorkommenden Variablen nach dem Ableiten eingesetzt werden bei denen der physikalische Vorgang stattgefunden hat.
Der resultierende Gewichtungsfaktor beschreibt also den Einfluss der Einzelunsicherheit (bzw. Einzelabweichung) auf die Unsicherheit (Abweichung) ΔR des Gesamtergebnisses R.

(b) Abschätzung durch Variation der einzelnen Variablen

Bei dieser Methode berechnet man die Einzelunsicherheiten durch direktes Einsetzen der Extremwerte der Unsicherheiten der einzelnen Variablen in $R = R(x, y, z, k)$. Schwankt beispielsweise x um Δx so wird einmal der Wert (x+Δx) und einmal (x-Δx) in R eingesetzt. Man erhält zwei Werte, einen größeren und einen kleineren, $R_x^{\max}$ und $R_x^{\min}$, die sich um $2\Delta R_x$ unterscheiden.

$$\Delta R = \sqrt{(\Delta R_x)^2 + (\Delta R_y)^2 + (\Delta R_z)^2} \qquad \text{wobei}$$

$$\Delta R_x = \frac{1}{2}\left(R_x^{\max} - R_x^{\min}\right)\ ; \quad R_x^{\max} = R(x+\Delta x, y, z, k)\ ; \quad R_x^{\min} = R(x-\Delta x, y, z, k)$$

$$\Delta R_y = \frac{1}{2}\left(R_y^{\max} - R_y^{\min}\right)\ ; \quad R_y^{\max} = R(x, y+\Delta y, z, k)\ ; \quad R_y^{\min} = R(x, y-\Delta y, z, k)$$

$$\Delta R_z = \frac{1}{2}\left(R_z^{\max} - R_z^{\min}\right)\ ; \quad R_z^{\max} = R(x, y, z+\Delta z, k)\ ; \quad R_z^{\min} = R(x, y, z-\Delta z, k)\quad .$$

Diese Methode ist besonders bei komplizierteren Zusammenhängen mit deutlich höherem Rechenaufwand verbunden als die Bildung der partiellen Ableitungen. Natürlich erscheint auf ersten Blick die Bildung einer Differenz einfacher als Differenzieren, jedoch steigt mit dem rechnerischen Aufwand auch die Wahrscheinlichkeit sich zu verrechnen!

Ein konkretes Anwendungsbeispiel:

Der Widerstand R eines elektrischen Drahtes hängt von seiner Länge l, dem Querschnitt A und dem spezifischen Widerstand ρ ab:

$R = \rho \cdot l/A$.

Angenommen, Sie wollen ρ bei einem gegebenen Draht ermitteln, indem Sie die Länge l des Drahtes und dessen Querschnitt A messen und seinen Widerstand nach dem Ohmschen Gesetz ($U = R \cdot I$) durch Strom- und Spannungsmessung bestimmen:

Aus $R = \rho \cdot l/A$ folgt durch Umformen $\rho = R \cdot A/l$ und aus dem Ohmschen Gesetz $R = U/I$, also insgesamt: $\rho = (U/I) \cdot (A/l)$. Sie messen U mit einem Voltmeter, I mit einem Amperemeter, l mit einem Maßband und bestimmen A, indem Sie den Durchmesser des Drahtes d mit einer Schublehre messen und dann A berechnen ($A = \pi \cdot d^2/4$). Nach Ermittlung der Messgrößen U, I, l, d berechnen Sie Ihr Ergebnis aus

$$\rho = \frac{U}{I} \cdot \frac{A}{l} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi \cdot d^2/4}{l} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot l} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l}, \text{ d.h. } \rho = \rho(U, I, d, l)$$

Man bestimmt nun die **partiellen Ableitungen**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U}\left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{I \cdot l} \cdot \frac{\partial}{\partial U}[U] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{I \cdot l} \cdot 1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d^2}{I \cdot l}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}\left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial I}\left[\frac{1}{I}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{l} \cdot \left[-\frac{1}{I^2}\right] = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I^2 \cdot l}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial d} = \frac{\partial}{\partial d}\left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U}{I \cdot l} \cdot \frac{\partial}{\partial d}\left[d^2\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U}{I \cdot l} \cdot 2d = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{U \cdot d}{I \cdot l}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I} \cdot \frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{1}{l}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I} \cdot \left[-\frac{1}{l^2}\right] = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{U \cdot d^2}{I \cdot l^2}$$

Setzt man die ermittelten Ableitungen in die Formel für die Unsicherheit (den Fehler) des Gesamtergebnisses ein, ergibt sich für $\Delta\rho$:

$$\Delta\rho = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\pi \cdot d^2}{4 \cdot I \cdot l} \cdot \Delta U\right)^2}_{S1} + \underbrace{\left(-\frac{\pi \cdot U \cdot d^2}{4 \cdot I^2 \cdot l} \cdot \Delta I\right)^2}_{S2} + \underbrace{\left(\frac{\pi \cdot U \cdot d}{2 \cdot I \cdot l} \cdot \Delta d\right)^2}_{S3} + \underbrace{\left(-\frac{\pi \cdot U \cdot d^2}{4 \cdot I \cdot l^2} \cdot \Delta l\right)^2}_{S4}}$$

alternativ lassen sich auch die **Einzelunsicherheiten bzw. die Gesamtunsicherheit Δρ auch durch Variation** der einzelnen Variablen abschätzen:

$$\rho_U^{\max} = \frac{U + \Delta U}{I} \cdot \frac{A}{l}; \qquad \rho_U^{\min} = \frac{U - \Delta U}{I} \cdot \frac{A}{l}; \qquad \Delta\rho_U = \frac{1}{2}\left(\rho_U^{\max} - \rho_U^{\min}\right)$$

$$\rho_I^{\max} = \frac{U}{I - \Delta I} \cdot \frac{A}{l}; \qquad \rho_I^{\min} = \frac{U}{I + \Delta I} \cdot \frac{A}{l}; \qquad \Delta\rho_I = \frac{1}{2}\left(\rho_I^{\max} - \rho_I^{\min}\right)$$

$$\rho_d^{\max} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\frac{1}{4}\pi\left(d + \Delta d\right)^2}{l}; \qquad \rho_d^{\min} = \frac{U}{I} \cdot \frac{\frac{1}{4}\pi\left(d - \Delta d\right)^2}{l}; \qquad \Delta\rho_d = \frac{1}{2}\left(\rho_d^{\max} - \rho_d^{\min}\right)$$

$$\rho_l^{\max} = \frac{U}{I} \cdot \frac{A}{l - \Delta l}; \qquad \rho_U^{\min} = \frac{U}{I} \cdot \frac{A}{l + \Delta l}; \qquad \Delta\rho_U = \frac{1}{2}\left(\rho_U^{\max} - \rho_U^{\min}\right)$$

$$\Delta\rho = \sqrt{\underbrace{(\Delta\rho_U)^2}_{S1} + \underbrace{(\Delta\rho_I)^2}_{S2} + \underbrace{(\Delta\rho_d)^2}_{S3} + \underbrace{(\Delta\rho_l)^2}_{S4}}$$

Messung 1: Sie messen als Spannung U mit einem Voltmeter 50mV, als Stromstärke I mit dem Amperemeter 0.5A. Die Länge des Drahtes l bestimmen Sie mit einem Maßband zu 0.5m. Zur Messung des Durchmessers des Drahtes verwenden Sie eine Schiebelehre und ermitteln als d 1mm.
Zur Berechnung des spezifischen Widerstandes des Drahtes verwenden Sie (selbstverständlich) SI-Einheiten; da Sie außerdem am Gesamtunsicherheit interessiert sind, bestimmen Sie auch gleich die Unsicherheiten bei den Einzelmessungen:
Spannung U : U =50mV=0.05V; als Fehler (Sie haben nur ein altes Analoggerät, dessen Zeigerstellung Sie nicht beliebig genau bestimmen können) schätzen Sie ΔU =0.01V.
Stromstärke I : I =0.5A; als Unsicherheit finden Sie in der Bedienungsanleitung die Angabe „1% des Messwertes", in Ihrem Fall ist dies ΔI =0.005A.
Durchmesser d : $d =$ 1mm=0.001m; die Ungenauigkeit bei der von Ihnen verwendeten Schiebelehre beträgt 1/10mm, d.h. Δd =0.0001m.
Länge l : Sie verwenden ein Maßband; Sie haben zwar eine Vielzahl von Messungen gemacht, allerdings ist die Qualität eines Maßbandes prinzipiell beschränkt; daher ist Δl =1cm=0.01m.
Nun setzen Sie Ihre Messwerte in den vorher ermittelten funktionalen Zusammenhang für den spezifischen Widerstand ρ ein: $\rho = (\pi/4)\cdot\left(U \cdot d^2 / I \cdot l\right)$ und erhalten als Gesamtergebnis (nach einiger Mühe mit dem Taschenrechner) ρ =1.57 $\cdot 10^{-7}\ \Omega m$. Um die Unsicherheit des Gesamtergebnisses zu bestimmen, verwenden Sie obige Formel und erhalten $\Delta\rho$ = 4.46 $\cdot 10^{-8}\ \Omega m$, das Gesamtergebnis Ihrer Messung ist also) ρ =(1.57 $\pm$ 0.45) $\cdot 10^{-7}\ \Omega m$, die relative Unsicherheit $\Delta\rho/\rho$ beträgt 28%.
Sie können die obige Rechnung aber zur weiteren Analyse Ihres Ergebnisses nutzen, indem Sie die absoluten Größen der einzelnen Summanden (S1 bis S4) miteinander vergleichen. Der Summand S1 gibt den Beitrag der Ungenauigkeit bei der Spannungsmessung zum Gesamtergebnis wieder, S2 jenen der Messung der Stromstärke, S3 den aus der Messung der Dicke des Drahtes und S4 jenen aus der Längenmessung. Wenn Sie die Summanden miteinander vergleichen (siehe Tabelle unten), erkennen Sie, dass S1 und S3 um den Faktor 10 größer sind als S2 und S4, d.h. die Spannungsmessung (S1) und die Messung der Dicke des Drahtes (S3) den Fehler des Gesamtergebnisses wesentlich bestimmen, während die durch die Messung der Stromstärke und der Länge bedingten Fehler vernachlässigbar sind.

Messung 2: In einer zweiten Messung verwenden Sie anbetracht der Ergebnisse der Gauß`schen Fehlerrechnung der ersten Messung eine andere Schiebelehre, die Ablesungen auf 1/100 mm zulässt. Damit können Sie zwar das Ergebnis der Dickenmessung nicht verbessern (Sie haben vorher schon nahezu perfekt gemessen), aber die Unsicherheit wesentlich einschränken.
Entsprechend bleibt das Ergebnis für den spezifischen Widerstand gleich; bei der Berechnung der Unsicherheit dieses zusammengesetzten Ergebnisses erkennen Sie allerdings den Einfluss Ihrer verbesserten Dickenmessung: Der Summand S3 ist um den Faktor 10 kleiner als bei der ersten Messung (s.u. Tabelle); dies schlägt sich im Gesamtergebnis in einer Verbesserung der relativen Unsicherheit von 28% auf 20% nieder.

Messung 3: Wider besseren Wissens verwenden Sie zur Verbesserung von Messung 2 in Messung 3 nicht mehr ein Maßband, sondern ermitteln die Länge Ihres Drahtes durch Laufzeitmessung eines Signals (kompliziert und teuer). Ergebnis Ihres hohen Aufwandes ist eine Verringerung des Summanden S4 um den Faktor 10 (siehe Tabelle). Da dieser Summand S4 aber nur vernachlässigbar in den Gesamtfehler eingeht, bleibt die relative Unsicherheit unverändert 20%.

Messung 4: Zur Planung von Messung 4 blättern Sie daher zur Auswertung von Messung 1 zurück. Dort hatten Sie erkannt, dass die Summanden S1 und S3 den Gesamtfehler wesentlich bestimmen. Den Summanden S3 haben Sie durch Verwendung einer besseren Schiebelehre bereits relativ verkleinert (siehe Messung 2); nun bemühen Sie sich, auch S1 zu reduzieren: Sie besorgen sich (relativ billig) ein besseres Voltmeter, mit Hilfe dessen Sie die Spannungen auf 5mV genau ablesen können.
Wieder ermitteln Sie dieselben Größen, aber die relative Unsicherheit des Gesamtergebnisses wird wesentlich geringer: Da der Summand S1 nun um den Faktor 10 kleiner ist, können Sie Ihren relativen Gesamtfehler als nur mehr 10% bestimmen.

	Messung 1	Messung 2	Messung 3	Messung 4
U [V]	0.05	0.05	0.05	0.05
ΔU [V]	0.01	0.01	0.01	0.005
I [A]	0.5	0.5	0.5	0.5
ΔI [A]	0.005	0.005	0.005	0.005
l [m]	0.5	0.5	0.5	0.5
Δl [m]	0.01	0.01	0.001	0.01
d [m]	0.001	0.001	0.001	0.001
Δd [m]	0.0001	0.00001	0.00001	0.00001
ρ $[\Omega m]$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$	$1.57 \cdot 10^{-7}$
$\|S1\|$ (ΔU)	$3.14 \cdot 10^{-8}$	$3.14 \cdot 10^{-8}$	$3.14 \cdot 10^{-8}$	$1.57 \cdot 10^{-8}$
$\|S2\|$ (ΔI)	$1.57 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$	$1.57 \cdot 10^{-9}$
$\|S3\|$ (Δd)	$3.14 \cdot 10^{-8}$	$3.14 \cdot 10^{-9}$	$3.14 \cdot 10^{-9}$	$3.14 \cdot 10^{-9}$
$\|S4\|$ (Δl)	$3.14 \cdot 10^{-9}$	$3.14 \cdot 10^{-9}$	$3.14 \cdot 10^{-10}$	$3.14 \cdot 10^{-9}$
$\Delta\rho$ $[\Omega m]$	$4.46 \cdot 10^{-8}$	$3.18 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$1.64 \cdot 10^{-8}$
$\Delta\rho/\rho$ [-]	0.28	0.20	0.20	0.10

Mit Hilfe der oben beschriebenen Gauß`schen Fehlerrechnung können Sie also nicht nur die Unsicherheit („den Fehler“) eines zusammengesetzten Ergebnisses korrekt bestimmen, sie ermöglicht auch, zu erkennen, welche Einzelmessung durch ihre Ungenauigkeit am stärksten bezüglich der Gesamtunsicherheit („des Gesamtfehlers“) eingeht.
Daher ist eine Gauß`sche Fehlerrechnung nicht nur zur Ermittlung der Gesamtunsicherheit heranzuziehen, sondern kann auch bei der Planung eines Experimentes zur schnelleren Erlangung eines befriedigenden Resultates eingesetzt werden.

Im Sinne des obigen Beispiels hat eine Gauß`sche Fehlerrechnung also zumindest zu enthalten:

- den ***funktionalen Zusammenhang***, mit Hilfe dessen das Resultat ermittelt wurde, unter Angabe der Messgrößen (und nicht aus Messgrößen zusammengesetzter Teilergebnisse!),
- ***die partiellen Ableitungen nach <u>allen</u> Messgrößen***,
- den funktionalen Zusammenhang, mit dem die Unsicherheit des zusammengesetzten Ergebnisses (Gesamtergebnisses) berechnet wird,
- ***das Ergebnis*** der Gauß`schen Fehlerrechnung im Sinne eines Gesamtergebnisses ($R \pm \Delta R$) sowie die relative Unsicherheit ($\Delta R/R$),
- für <u>jede</u> Messgröße: der Zahlenwert mit Einheit, die Größe der Unsicherheit („des Fehlers“) mit Einheit sowie eine Erklärung, wie die Größe des Fehlers bestimmt wurde,
- sowie letztendlich ***eine Interpretation der Berechnung der Unsicherheit***: welches Teilergebnis geht in die Größe des Gesamtfehlers am meisten ein, wie könnte folglich mit der größten Effizienz der Ablauf der Messung/die Messgeräte/.. verändert werden, um einen kleineren als den errechneten Gesamtfehler zu erhalten.

Aufgabenstellung

Sie erhalten auf einem weiteren Angabeblatt die Messergebnisse eines physikalischen Experimentes wie auch Angaben zu den dabei verwendeten Messgeräten.. Führen Sie zu diesem Experiment eine vollständige Gauß`sche Fehlerrechnung durch; alle notwendigen Angaben dazu erhalten Sie auf dem Aufgabenblatt.

(Literatur: Netz, Formeln der Mathematik, (254,258), Westphal, Physikalisches Praktikum, Kap.I.B.6. -I.B.12 (7-19) sowie Drosg, Einführung in das Messen und in Unsicherheiten)

Protokoll:
Vergessen Sie bitte nicht, auf die Vollständigkeit Ihrer Lösung der Aufgabe zu achten (siehe oben).

Differentiationsregeln & die erste Ableitung elementarer Funktionen **Netz**

6.43 Allgemeine Differentiationsregeln

(In [ ] ist jeweils eine zweite gebräuchliche Schreibart angegeben.)

1. Ableitung einer Konstanten

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad (c = \text{const})$$

2. Ableitung eines konstanten Faktors

$$\frac{d}{dx}(c \cdot f(x)) = c\,\frac{df(x)}{dx} = c \cdot f'(x) \qquad \left[\frac{d\,(Cu)}{dx} = C\,\frac{du}{dx} = C\,u'\right]$$

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

3. Ableitung einer Summe

$$\frac{d}{dx}\Big[f(x) \pm g(x)\Big] = \frac{d}{dx}\,f(x) \pm \frac{d}{dx}\,g(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\left[\frac{d\,(u \pm v)}{dx} = (u \pm v)' = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} = u' \pm v'\right]$$

Eine Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden.

4. Produktregel

$$\frac{d}{dx}\,(f(x) \cdot g(x)\,) = f(x)\,\frac{dg(x)}{dx} + g(x)\,\frac{df(x)}{dx}$$

$$\left[\frac{d\,(u \cdot v)}{dx} = (uv)' = uv' + vu' = uv\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right)\right]$$

Bei mehr als zwei Faktoren gilt entsprechend:

$$(u\,v\,w)' = u\,v\,w\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} + \frac{w'}{w}\right)$$

5. Quotientenregel

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{1}{[g(x)]^2}\left\{g(x)\,\frac{df(x)}{dx} - f(x)\,\frac{dg(x)}{dx}\right\}$$

$$\left[\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{d\,x} = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - v'\,u}{v^2}\right]$$

6. Kettenregel

Ist $y = f\,[\varphi(x)] = f(u)$ eine zusammengesetzte Funktion, wobei $u = \varphi(x)$ ist, so gilt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{df(u)}{du} \cdot \frac{du(x)}{dx} \qquad \left[\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right]$$

254

6.44 Die erste Ableitung der elementaren Funktionen (vgl. Seite 254)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$[f(x)]^n$	$n \cdot [f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$		
ax^n	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sin x}$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{3}\,x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$\frac{1}{\cos x}$	$\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
$x^{\frac{n}{m}}$	$\frac{n}{m}\,x^{\frac{n}{m}-1}$	$\sinh x$	$\cosh x$
		$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$-1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$	$\tanh x$	$= \frac{1}{\cosh^2 x}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$-n \cdot x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\coth x$	$= -\frac{1}{\sinh^2 x}$
		$\text{arc}\sin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$\frac{2x}{2\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$	$\text{arc}\cos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
e^x	e^x		
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$\text{arc}\tan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
		$\text{arc}\cot x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\text{ar}\sinh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$		
$\lg x$	$\frac{1}{x \cdot \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$	$\text{ar}\cosh x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
		$\text{ar}\tanh x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\ln \sin x$	$\cot x$		
$\ln \cos x$	$-\tan x$	$\text{ar}\coth x$	$-\frac{1}{x^2-1}$
$\ln \tan x$	$\frac{2}{\sin 2x}$	$a \cdot \text{arc}\sin \frac{x}{a}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\ln \cot x$	$-\frac{2}{\sin 2x}$	$a \cdot \text{arc}\cos \frac{x}{a}$	$-\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}$
$\sin x$	$\cos x$	$\text{arc}\tan \frac{x}{a}$	$\frac{a}{a^2+x^2}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\text{arc}\cot \frac{x}{a}$	$-\frac{a}{a^2-x^2}$

258